

BRK-016 · La demostración formal encuentra límites internos

BRK · Rupturas conceptuales

Juan Seguro · All Rights Reserved

Un método regido por reglas puede ser preciso sin poder resolver todas las preguntas expresables en él. La lógica del siglo XX convirtió esta limitación en un objeto matemático. En lugar de limitarse a no encontrar una demostración o un algoritmo, los investigadores podían demostrar que una clase especificada de métodos no podía realizar una tarea universal.

El cambio resultante no abolió la demostración. Distinguió varios logros que, vistos desde lejos, pueden parecer intercambiables: comprobar una derivación propuesta, encontrar una derivación, decidir todo enunciado y establecer la consistencia de un sistema. Una vez separadas estas tareas, podían demostrarse sus distintos límites.

1. Estudiar las demostraciones como objetos finitos

El programa de Hilbert buscaba formalizar el razonamiento matemático y justificar su consistencia mediante métodos finitarios restringidos. Sus aspiraciones eran más específicas que la imagen popular de una máquina que descubre automáticamente toda verdad. Las propias demostraciones formalizadas podían estudiarse como secuencias finitas, aunque las matemáticas que expresaban se refirieran a estructuras infinitas. [1]

Este cambio dio una doble función a la demostración. Era un argumento dentro de las matemáticas y un objeto para otra investigación matemática. Podía preguntarse si una secuencia obedecía las reglas, si alguna vez podía derivarse una

contradicción y qué supuestos requería un argumento de consistencia propuesto.

El programa no consideraba suficiente la manipulación arbitraria de símbolos para una ciencia con significado. Buscaba justificar métodos matemáticos potentes. Por tanto, sus dificultades atañen al alcance de esquemas formales y justificativos particulares, no a la afirmación de que toda práctica matemática sea únicamente sintaxis.

2. La incompletitud es relativa a un sistema

El trabajo de Gödel de 1931 estableció limitaciones para sistemas formales capaces de representar suficiente aritmética. En la forma moderna que incorpora el fortalecimiento de Rosser, una teoría consistente, efectivamente axiomatizada y que extienda una aritmética elemental adecuada no puede decidir todo enunciado de su lenguaje: algún enunciado no es demostrable ni refutable dentro de ella. [2,3]

Cada condición importa. Una teoría débil o restringida no tiene por qué ser incompleta de esta manera. Una colección que contenga todos los enunciados aritméticos verdaderos no es una salida efectivamente axiomatizada al resultado. Y un sistema inconsistente no es un fundamento completo satisfactorio por el mero hecho de que la inferencia clásica le permita derivar cualquier cosa.

La expresión «dentro de» importa tanto como «no puede». Un enunciado indemostrable en una teoría puede ser demostrable en otra más fuerte. Añadirlo como axioma cambia la teoría. Si la nueva teoría sigue cumpliendo las condiciones pertinentes, la incompletitud vuelve a aplicarse. El teorema no identifica un enunciado que ninguna forma concebible de razonamiento pueda establecer jamás.

3. Un sistema habla de sus propias derivaciones

La vía técnica utiliza la aritmética para codificar expresiones y demostraciones. Así, las relaciones entre secuencias finitas de símbolos pueden representarse como relaciones entre números. Una construcción diagonal produce después un enunciado cuyo contenido aritmético corresponde a una afirmación sobre su propia demostrabilidad en el sistema elegido. [2]

Esto no es simplemente la frase cotidiana «esta frase es falsa» revestida de notación matemática. La demostrabilidad es una relación especificada que implica derivaciones codificadas y reglas. La construcción funciona porque esas relaciones pueden representarse con suficiente precisión dentro de la aritmética. Las condiciones de la demostración impiden que una paradoja verbal sustituya a un argumento.

El tratamiento original de Gödel utilizaba una hipótesis más fuerte que la mera consistencia para una de las partes del primer resultado. Las formulaciones posteriores pueden debilitar ese requisito. Un relato histórico responsable debe distinguir la demostración original del teorema simplificado que suele enseñarse hoy, en lugar de atribuir a 1931 todos los refinamientos posteriores. [3]

4. La consistencia no puede certificarse simplemente a sí misma

El segundo teorema de incompletitud impone otro límite a las teorías consistentes suficientemente fuertes: bajo la formalización habitual de la demostración y la consistencia, una teoría así no puede demostrar su propia consistencia. La salvedad sobre la formalización es esencial; escribir cualquier enunciado conveniente y llamarlo «consistencia» no reproduce el objeto del teorema. [3]

Esto no significa que un matemático no pueda dar una demostración de consistencia para una teoría. Un marco más fuerte puede establecer la consistencia de otro más débil, y los resultados de consistencia relativa siguen siendo valiosos. Lo que queda impedido es un tipo particular de autocertificación desde dentro de un sistema que cumple los supuestos del teorema.

El resultado tampoco vuelve poco fiables las demostraciones individuales. Si una derivación finita sigue correctamente reglas aceptadas a partir de axiomas aceptados, el teorema no introduce un error en ella. Restringe lo que el aparato formal completo puede establecer sobre sí mismo y sobre todos los enunciados de su lenguaje.

5. La computación adquiere un límite análogo

Church y Turing abordaron el cálculo efectivo mediante análisis formales diferentes en la década de 1930. El artículo de Turing de 1936 describió la computación en términos de una máquina que sigue instrucciones finitas y utilizó ese análisis para establecer un resultado de indecidibilidad. La contribución no era únicamente una propuesta de dispositivo físico. Hizo matemáticamente accesible una limitación general de los procedimientos mecánicos. [4,5]

Un argumento moderno sobre la parada ilustra la estructura. Supongamos que un procedimiento H siempre decide correctamente si cualquier programa se detiene con cualquier entrada. Construyamos un programa D que, al recibir una descripción de programa p , pregunta a H qué hace p cuando recibe p como entrada. Si H predice la parada, D se ejecuta indefinidamente; si H predice que no se detiene, D se detiene.

Demos ahora a D su propia descripción. Cualquiera de las respuestas de H hace que D se comporte de manera contraria a esa

respuesta. Por tanto, el supuesto procedimiento decisor universal y siempre correcto no puede existir. Esta es una formulación moderna explicativa, no el enunciado ni el objeto exacto de la demostración original de Turing. Se refiere a una clase irrestricta de programas; muchos programas particulares y clases restringidas siguen pudiendo analizarse con éxito.

El contraste con la comprobación de una demostración es instructivo. Una demostración válida, cuando se proporciona, puede tener una estructura finita comprobable mecánicamente aunque ningún algoritmo decida toda pregunta matemática posible. Verificar un objeto presentado y garantizar la decisión de una pregunta arbitraria son tareas distintas.

6. Lo que hicieron posible los límites

La tesis de Church–Turing conecta una idea informal de cálculo efectivo con modelos precisos de computación. Los resultados de equivalencia entre modelos formales son teoremas matemáticos; la identificación con la noción informal es una tesis respaldada por el análisis, no otro caso del mismo tipo de demostración formal. [5]

Estos resultados no establecen que las mentes humanas trasciendan necesariamente toda explicación computacional. Esa conclusión requiere supuestos adicionales sobre el razonamiento humano y su consistencia. Tampoco muestran que la verdad sea arbitraria o que nada pueda conocerse. Su fuerza depende de la precisión de las proposiciones que realmente establecen.

La ruptura conceptual consistió en que los límites se volvieron demostrables desde dentro de la investigación matemática. No completar un programa universal podía explicarse mediante un teorema, en lugar de atribuirse a una persistencia insuficiente. Eso reorientó el trabajo hacia sistemas más fuertes y más débiles,

procedimientos de decisión restringidos y supuestos explícitos, dejando intacto un enorme dominio de demostración rigurosa.

Lectura relacionada

El artículo BRK 017, «Hacer medible la sensación: psicofísica y cronometría mental», examina otra frontera entre una operación observable y la inferencia más fuerte que podríamos sentirnos tentados a extraer de ella.

Referencias

- [1] Zach, R. "Hilbert's Program." *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. <https://plato.stanford.edu/entries/hilbert-program/>
- [2] Gödel, K. "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I." *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38, 173–198 (1931). <https://doi.org/10.1007/BF01700692>
- [3] Raatikainen, P. "Gödel's Incompleteness Theorems." *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. <https://plato.stanford.edu/entries/goedel-incompleteness/>
- [4] Turing, A. M. "On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem." *Proceedings of the London Mathematical Society*, serie 2, 42, 230–265 (1936–1937). <https://doi.org/10.1112/plms/s2-42.1.230>
- [5] Copeland, B. J. "The Church-Turing Thesis." *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. <https://plato.stanford.edu/entries/church-turing/>