

BRK-006 · El infinito se convierte en objeto de comparación exacta

BRK · Rupturas conceptuales

Juan Segurola · All Rights Reserved

Una colección sin fin puede ser mayor que otra colección sin fin, pero «mayor» necesita una definición. Comparar longitudes, densidades o los lugares ocupados por símbolos escritos no responde a la misma pregunta que comparar cuántos elementos contienen las colecciones.

La transformación conceptual asociada al trabajo de Cantor convirtió la correspondencia uno a uno en una base de comparación exacta. Algunos conjuntos infinitos pueden emparejarse elemento a elemento; en otros casos puede demostrarse que los emparejamientos propuestos son imposibles. El infinito pasó así a ser un objeto de diferenciación matemática, en vez de una única manera indiferenciada de decir que un proceso nunca termina.

1. Emparejar cambia la pregunta

Emparejemos cada entero positivo n con el entero par $2n$. Cada entero positivo recibe exactamente una pareja y se alcanza cada entero positivo par. En el sentido de la cardinalidad, los dos conjuntos tienen el mismo tamaño, aunque los enteros pares forman un subconjunto propio de los enteros positivos.

No hay contradicción con la regla correspondiente para los conjuntos finitos. Un subconjunto propio de un conjunto finito no puede tener el mismo número de elementos que el conjunto completo. El ejemplo infinito muestra que esa propiedad finita no se extiende sin matices a los conjuntos infinitos. No debemos

introducirla subrepticamente en una definición destinada a investigarlos.

Los enteros también pueden disponerse en una sucesión, por ejemplo 0, 1, -1, 2, -2 y así sucesivamente. Los números racionales positivos pueden enumerarse recorriendo pares de enteros positivos en orden creciente de su suma y omitiendo las fracciones duplicadas. Cada par concreto de numerador y denominador aparece tras un número finito de pasos.

Esta última precisión es esencial. Escribir un patrón sugerente no basta si algunos elementos se posponen indefinidamente. Una enumeración válida debe asignar a cada elemento una posición finita. La construcción ofrece una razón por la que eso ocurre.

2. La densidad no es la cardinalidad

Entre dos números reales distintos cualesquiera hay números racionales. Esa densidad puede hacer que parezca que los racionales llenan la recta en el sentido pertinente. Sin embargo, la densidad se refiere a dónde aparecen los elementos respecto a los intervalos; la numerabilidad, a si admiten una lista completa indexada por enteros positivos.

El artículo de Cantor de 1874 estableció la numerabilidad de los números algebraicos reales y un resultado distinto para los números reales en general. Los números algebraicos satisfacen ecuaciones polinómicas no nulas con coeficientes enteros. Solo hay una cantidad numerable de esas ecuaciones finitas, y cada una tiene un número finito de raíces. Enumerar sistemáticamente las ecuaciones permite, por tanto, construir un argumento de numerabilidad. [1]

La construcción de la fuente ordena las ecuaciones mediante una medida finita de su complejidad. La explicación de aquí expone la

idea organizativa moderna, no transcribe cada paso de la demostración original. Lo importante es que un conjunto puede contener todas esas raíces, ser denso en la recta y seguir siendo enumerable.

La medida introduce otra pregunta diferente. La longitud de un intervalo no es su cardinalidad. Un intervalo del doble de longitud puede tener la misma cardinalidad que el original mediante un simple cambio de escala. Mantener separados estos conceptos evita exigir a la expresión «distintos infinitos» que explique nociones de tamaño no relacionadas.

3. Una demostración invalida cualquier lista propuesta

Para ver el contraste, supongamos que alguien propone una lista completa de los números reales entre cero y uno, escribiendo cada uno en forma decimal. Construyamos un decimal nuevo cuya cifra en la posición n sea 1 cuando la cifra en la posición n del número n de la lista no sea 1, y 2 cuando esa cifra sea 1.

El número nuevo difiere de la primera entrada en su primera cifra, de la segunda en su segunda cifra y de cada entrada n en su cifra n . No puede ser ninguna entrada de la lista. Usar solo 1 y 2 también evita la ambigüedad por la que un decimal finito equivale a otro que termina en nueves repetidos.

Esta es una versión decimal moderna de la estrategia diagonal asociada al trabajo de Cantor de 1891. No es la demostración del artículo de 1874, que utilizaba una construcción diferente con intervalos encajados. Confundirlas convierte una elegante exposición moderna en una atribución histórica inexacta. [1,2]

El argumento no muestra simplemente que una lista concreta mal ordenada falla. Parte de una lista propuesta arbitraria y da una regla que produce un elemento omitido. Su fuerza procede de esa

generalidad. Una ordenación mejor no puede eludir la misma construcción.

4. Qué cambia cuando se demuestra una imposibilidad

Antes de una demostración, la incapacidad de encontrar una lista podría reflejar un ingenio limitado. Después del argumento, ninguna enumeración del tipo especificado puede tener éxito. La comparación entre enteros y reales adquiere así un obstáculo definido con precisión.

Esto no afirma que alguna colección física contenga una infinidad de objetos contada experimentalmente. El marco matemático se refiere a conjuntos y correspondencias bajo sus supuestos. Que un infinito matemático sea útil en un modelo físico es una cuestión distinta de si se han observado infinitas cosas físicas.

Una tabla diagonal finita tampoco demuestra la no numerabilidad. Un ordenador puede mostrar cualquier comienzo finito elegido de la regla, pero una lista finita siempre deja muchas posibilidades. La demostración matemática explica por qué la construcción funciona para cada índice de una supuesta lista infinita. Su justificación es deductiva, no una extrapolación a partir de muchos ensayos exitosos.

La ganancia es un nuevo criterio de exactitud. En vez de apoyarse en imágenes de algo interminable, los matemáticos pueden especificar las aplicaciones que existen y demostrar la inexistencia de otras. Una intuición familiar sobre la parte y el todo pasa a ser una propiedad que examinar, no un juez incuestionable de todas las posibilidades.

5. La disputa histórica no fue solo resistencia a la novedad

El trabajo de Cantor se desarrolló en un contexto más amplio que incluía el análisis, las definiciones de los números reales y la correspondencia con Dedekind. Su recepción incluyó objeciones a los métodos infinitarios y a la condición de las colecciones infinitas completadas. Los estudios históricos registran críticas de matemáticos con compromisos constructivos o fundacionales distintos, no una oposición uniforme. [2]

Aquí importa la distinción entre un proceso que siempre puede continuar y un conjunto infinito completado. Aceptar lo primero no compromete automáticamente a aceptar cualquier operación sobre lo segundo. Los argumentos sobre fundamentos se refieren a qué objetos y principios de razonamiento son legítimos, no solo a si gusta una conclusión sorprendente.

Las paradojas posteriores exigieron aclarar qué colecciones podían tratarse como conjuntos. No convirtieron sin más toda correspondencia anterior en un error. La historia combina la conservación de resultados con restricciones y reconstrucciones de los fundamentos, en vez de una secuencia de victorias totales y derrumbes totales. [2]

6. Un nuevo objeto de investigación

La ruptura fue la posibilidad de comparar infinitos mediante demostraciones de equivalencia y de no equivalencia. Ese logro dejó preguntas difíciles sobre los fundamentos, las construcciones permitidas y las relaciones entre distintas nociones de tamaño. No las redujo a una sola respuesta.

Un subconjunto propio puede tener la cardinalidad del conjunto infinito en el que está contenido; un conjunto denso numerable

puede no agotar un continuo; dos intervalos pueden diferir en longitud y admitir una biyección. Cada enunciado resulta comprensible una vez especificada la relación que se mide. El avance no consistió simplemente en tolerar un lenguaje paradójico, sino en sustituirlo por afirmaciones matemáticas distinguibles.

Lectura relacionada

El artículo BRK 005, «La geometría deja de tener una única forma inevitable», también sigue la sustitución de una intuición heredada por supuestos y construcciones explícitos.

Referencias

- [1] Cantor, G. “Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen.” *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 77, 258–262 (1874). Traducción inglesa de James R. Meyer, “On a Property of the Set of all Real Algebraic Numbers.” <https://jamesrmeyer.com/infinite/cantor-1874-uncountability-proof>
- [2] Ferreirós, J. “The Early Development of Set Theory.” *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. <https://plato.stanford.edu/entries/settheory-early/>