

BRK-005 · La geometría deja de tener una única forma inevitable

BRK · Rupturas conceptuales

Juan Seguro · All Rights Reserved

Un enunciado geométrico puede ser imposible de demostrar a partir de un conjunto de supuestos porque no se sigue de ellos. Esa posibilidad cambia el significado de una demostración fallida. Los fracasos repetidos no tienen por qué revelar falta de ingenio; pueden poner de manifiesto un supuesto que pertenece a las premisas y no a las consecuencias.

El desarrollo de la geometría no euclidiana transformó un antiguo problema sobre paralelas en otro nuevo sobre estructuras matemáticas alternativas. La geometría euclidiana no fue refutada. Cambió su condición: podía entenderse como una geometría con supuestos particulares, en vez de como la única forma inevitable del razonamiento espacial.

1. Un postulado problemático

El quinto postulado de Euclides se refiere a cuándo dos rectas, cortadas por una tercera, se encuentran en el lado donde determinados ángulos interiores suman menos de dos ángulos rectos. Una formulación equivalente habitual, bajo los supuestos de fondo usuales de la geometría plana, afirma que por un punto exterior a una recta pasa exactamente una paralela a ella.

La propia equivalencia depende del marco circundante. Sustituir la redacción original por la formulación habitual resulta útil para explicar, pero no debe sugerir que un postulado tiene significado con independencia de los demás axiomas y definiciones con los que opera.

Los intentos de deducir el postulado de las paralelas de premisas supuestamente más evidentes introducían a veces un supuesto equivalente en otro lugar. La discusión histórica de Wallis y Saccheri ilustra cómo una demostración puede ocultar precisamente el compromiso espacial que pretendía establecer. [1]

Esto no es una acusación de simple descuido. Cuando una geometría estructura los diagramas y las intuiciones habituales, puede resultar difícil reconocer qué hechos aparentemente obvios dependen de ella. La tarea consiste en distinguir lo que sugiere un dibujo de lo que implican los supuestos declarados.

2. Convertir la deducción fallida en otra teoría

Lobachevski y Bolyai desarrollaron alternativas en las que no se imponía la condición euclidiana de las paralelas. Su trabajo permitió investigar las consecuencias de una condición diferente, en vez de utilizar cada consecuencia inesperada como motivo para rechazarla. [1]

En el plano hiperbólico, más de una recta que pasa por un punto exterior puede no cortar una recta dada. La terminología histórica exige cuidado: Lobachevski distinguía las paralelas límite de otras rectas que no se cortan, por lo que sustituir sin más «paralela» por su significado cotidiano en cada enunciado histórico puede inducir a error. [2]

Los triángulos no tienen entonces por qué sumar π radianes en sus ángulos. En la geometría hiperbólica de curvatura constante, la suma es menor. Si la curvatura es $-1/R^2$, el área de un triángulo geodésico es R^2 multiplicado por su defecto angular, $\pi - (A + B + C)$. Es una relación matemática dentro del modelo, no una medición del espacio físico. [1]

En un triángulo ilustrativo con tres ángulos de 30 grados, la suma es 90 grados y el defecto es $\pi/2$ radianes. Su área en ese modelo es $\pi R^2/2$. El ejemplo muestra por qué cambiar la estructura de las paralelas afecta a las relaciones cuantitativas de toda la geometría. No identifica una región triangular en el universo real.

3. Un modelo responde a una pregunta distinta de la de una imagen

Desarrollar muchas consecuencias sin encontrar una contradicción es valioso, pero no demuestra por sí solo la consistencia. Una estrategia más potente representa la nueva geometría dentro de un marco matemático ya aceptado. Si sus puntos y rectas pueden interpretarse de manera que se cumplan los axiomas exigidos, cualquier contradicción se trasladaría al marco utilizado para construir el modelo.

Esto es consistencia relativa. No es una demostración de que las matemáticas estén absolutamente libres de contradicción. Establece una relación condicional entre teorías. Los trabajos del siglo XIX que conectaron la geometría no euclidiana con otros métodos geométricos contribuyeron a transformarla de una alternativa aislada en una disciplina matemática dotada de esas conexiones. [1]

Una ilustración moderna es el modelo del disco del plano hiperbólico. Los puntos están dentro de un disco euclidiano; las rectas hiperbólicas se representan mediante diámetros o arcos de circunferencia que cortan el borde en ángulo recto. Esos arcos parecen curvos sobre la página, pero la rectitud dentro del modelo la determinan su métrica y sus geodésicas, no la regla euclidiana del dibujo.

La circunferencia del borde no es una pared a la que los habitantes del modelo llegan finalmente tras recorrer una distancia

hiperbólica finita. Confundir la representación con la métrica representada borraría precisamente la distinción que el modelo pretende establecer. Un modelo fiel puede utilizar objetos matemáticos familiares y asignarles una función estructural diferente.

4. El espacio físico es una pregunta adicional

Una geometría alternativa consistente establece una posibilidad matemática. No establece qué geometría describe mejor las relaciones espaciales medidas. Para ello hacen falta observaciones y una explicación de los instrumentos y procesos físicos utilizados para obtenerlas.

Ni siquiera la medición de un triángulo está vacía de contenido conceptual. ¿Qué establece sus lados? ¿Cómo se transportan o comparan los ángulos? ¿Qué proceso físico se considera que traza una trayectoria recta? El experimento pone a prueba una interpretación geométrica junto con supuestos sobre varillas, señales y medición, no un dibujo aislado.

Esto no priva de sentido a la pregunta empírica. Hace explícitas sus dependencias. Un modelo obtiene apoyo físico mediante aplicaciones exitosas que permiten discriminar, dentro de una explicación de la medición. La consistencia lógica y la adecuación empírica son logros diferentes, y ninguno sustituye al otro.

El triángulo esférico ofrece una advertencia útil sobre el contexto. En una esfera pueden darse tres ángulos rectos cuando los lados son arcos de círculos máximos. Esa observación muestra que la geometría de una superficie puede diferir de la geometría plana. Por sí sola, no demuestra la consistencia de toda teoría no euclidiana ni determina la geometría del espacio físico tridimensional.

5. La aceptación no fue una consecuencia instantánea

Las alternativas históricas no eliminaron inmediatamente las expectativas establecidas. Su significado se entrelazó con desarrollos más amplios de la geometría proyectiva, la geometría diferencial y la axiomática. Las respuestas filosóficas también diferían sobre si las alternativas eran meras construcciones formales o cambiaban la condición de las afirmaciones sobre el espacio experimentado. [1]

Un lector actual puede pasar por alto la dificultad si parte de un catálogo moderno de geometrías. Parte del trabajo conceptual consistió en construir ese catálogo: admitir que una estructura poco familiar, pero desarrollada sistemáticamente, pudiera contar como geometría.

Por eso la transición no debe describirse como el descubrimiento de que Euclides estaba equivocado. Muchos teoremas euclidianos siguen siendo válidos bajo supuestos euclidianos y útiles en aproximaciones físicas apropiadas. Lo que falló fue la inferencia sin restricciones que pasaba de su autoridad familiar a la necesidad de esos supuestos en cualquier contexto matemático o físico.

6. Qué podía preguntarse ahora

El nuevo marco separa tres preguntas: qué se sigue de unos axiomas especificados, cómo relaciona un modelo una teoría con otra y qué descripción matemática se ajusta a una investigación física. Preguntas que antes parecían inseparables pueden recibir respuestas diferentes.

Esa separación es la ruptura conceptual. La geometría se convierte en un campo donde pueden construirse y compararse alternativas sin certificarlas antes como la única descripción inevitable del

espacio. Gana libertad mediante una atención más estricta a los supuestos, mientras las afirmaciones empíricas adquieren una exigencia de medición más clara.

Lectura relacionada

El artículo BRK 001, «Movimiento sin un motor continuo», sigue un cambio relacionado en lo que se trata como estado por defecto y lo que exige explicación. El artículo BRK 006, «El infinito se convierte en objeto de comparación exacta», examina otra redefinición matemática de una idea aparentemente evidente.

Referencias

- [1] Torretti, R. "Nineteenth Century Geometry." *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, especialmente §§1–2 y §4. <https://plato.stanford.edu/entries/geometry-19th/>
- [2] Lobachevski, N. I. *Geometrical Researches on the Theory of Parallels*. Traducción de George Bruce Halsted. Open Court, impresión de 1914, §16. <https://archive.org/details/geometricalresea00lobaiala>