

¿Puede una figura tener área finita y perímetro infinito?

Juan Segurola · Todos los derechos reservados

QUE · Artículo 045 · Preguntas sencillas, respuestas profundas · Versión 0.1 ES

Sí. Un borde matemático definido con precisión puede tener longitud infinita y encerrar un área finita. La aparente contradicción surge de tratar dos medidas diferentes como si una tuviera que crecer siempre que crece la otra. Un borde puede ganar mucha longitud mediante recodos cada vez más pequeños y añadir, al mismo tiempo, cada vez menos área.

El copo de nieve de Koch hace explícita esta distinción. Su construcción es útil porque podemos calcular cada etapa finita y preguntar después qué ocurre en el límite. La respuesta se refiere a un objeto matemático, no a una afirmación de que una costa física tenga estructura a escalas arbitrariamente pequeñas. [1]

1. Una regla que puede repetirse

Empecemos con un triángulo equilátero de lado s . Sustituyamos cada lado por cuatro segmentos, cada uno de longitud igual a un tercio del original: conservamos el primer y el último tercio y sustituimos el tercio central por los otros dos lados de un triángulo equilátero que apunta hacia fuera. Aplicamos la misma operación a cada segmento nuevo. [1]

En la etapa cero, el borde tiene tres lados. En la etapa uno tiene doce; en la etapa dos tiene cuarenta y ocho. En general, hay 3×4^n segmentos en la etapa n , y cada segmento tiene longitud $s/3^n$. Por tanto, su longitud total es $P(n) = 3s(4/3)^n$. Esta expresión se deduce de la regla indicada; no es un ajuste empírico.

Cada etapa multiplica el perímetro por $4/3$. Los segmentos individuales se acortan, pero su número crece más deprisa. Para cualquier límite superior finito que se proponga para el perímetro, continuar la construcción lo suficiente produce un polígono con un perímetro mayor. Cada polígono finito sigue teniendo longitud finita. El crecimiento sin cota se refiere a la sucesión, y el borde límite no es ninguno de esos polígonos.

2. Adónde va el área adicional

Sea A el área del triángulo original. En el primer paso añadimos tres triángulos de lado $s/3$. Las áreas varían como el cuadrado de una dimensión lineal, por lo que cada triángulo pequeño tiene área $A/9$. La primera adición es $A/3$.

En el segundo paso se añaden doce triángulos aún más pequeños. Cada uno tiene área $A/81$, lo que da una adición total de $4A/27$. La siguiente adición es $16A/243$. Cada total de área añadida es $4/9$ del anterior. A diferencia de $4/3$, esta razón es menor que uno.

El área total tras n pasos es $A(n) = A + (A/3)[1 + 4/9 + \dots + (4/9)^{(n-1)}]$. La expresión entre corchetes es una suma geométrica finita. Al tomar su límite se obtiene $A(\text{infinity}) = A + (A/3)/(1 - 4/9) = 8A/5$. Esto coincide con el cálculo habitual del copo de nieve. [1]

Para dar una escala concreta, si el triángulo inicial tiene un área de 100 unidades cuadradas, el área límite es de 160 unidades cuadradas. Tras dos pasos, el área es de unas 148,15 unidades cuadradas. El perímetro ya ha crecido por un factor de $16/9$ y puede seguir creciendo sin cota. Estos números describen solo la construcción ideal.

3. Por qué el límite es una afirmación matemática real

Una instrucción interminable no justifica por sí sola todas las propiedades que podamos atribuir a su resultado. Necesitamos especificar qué converge. Aquí, los rasgos añadidos ocupan escalas espaciales progresivamente menores. Sus desplazamientos máximos forman una serie geométrica convergente, de modo que los contornos sucesivos se acercan a una curva límite continua y definida.

Las longitudes poligonales crecientes también corresponden a verdaderas cotas inferiores de la longitud de esa curva. La construcción conserva los vértices de las etapas anteriores. Conectar una selección finita ordenada de puntos del borde límite produce una aproximación poligonal. La longitud de una curva se define tomando el supremo de esas sumas finitas de distancias. Puesto que los vértices conservados de la etapa n ya dan $P(n)$, y $P(n)$ no está acotado, la curva no puede tener longitud finita.

Este argumento importa. En general, figuras que convergen no tienen por qué tener perímetros que converjan al perímetro de la figura que creemos ver. Aquí, la conclusión sobre la longitud se sigue de los vértices conservados y de la definición de longitud, no solo de una impresión de rugosidad creciente.

El área se comporta de forma diferente porque cada nueva contribución disminuye geoméricamente. El área finita y la longitud infinita del borde son propiedades compatibles bajo sus respectivas definiciones. Ninguno de los cálculos anula el otro.

4. Lo que observaría un instrumento

Un dibujo, una pantalla de ordenador o un objeto fabricado detiene la construcción después de un número finito de escalas efectivas. Por debajo de un píxel, de la resolución de una herramienta o de una escala material, la instrucción matemática ya no describe un rasgo adicional que pueda resolverse. Por tanto, una medición de un borde físico debe especificar cómo se midió la longitud y a qué resolución.

Una regla más fina puede revelar más borde que una regla más gruesa. Esa observación puede motivar un modelo con longitud dependiente de la escala. No establece que el objeto real sea el límite infinito ni que el modelo siga siendo válido más allá de las escalas examinadas. La incertidumbre de medición y el infinito matemático son cuestiones distintas.

Incluso una imagen muy exacta no puede distinguir por sí sola todas las continuaciones posibles a escalas finas compatibles con ella. Una curva suave, un polígono finito intrincado y un fractal ideal pueden coincidir a la resolución disponible. La evidencia sobre un intervalo de escalas no debería convertirse inadvertidamente en una afirmación sobre todas las escalas.

5. El error de la respuesta rápida

El error habitual es imaginar que solo se añade longitud expandiéndose hacia fuera a una escala fija. Bajo esa restricción, un mayor perímetro suele acompañar a una mayor área. El copo de nieve relaja la restricción: un número creciente de rasgos se hace cada vez más pequeño. La longitud y el área responden entonces a distintas potencias del factor de escala.

El resultado es exacto dentro de la construcción. Su pertinencia para un objeto físico es una cuestión de modelización separada. Sabemos cómo se comporta la sucesión ideal porque podemos demostrarlo. Determinar si esa sucesión describe un borde medido, a qué escalas y con qué desviaciones requiere observaciones.

Lectura relacionada

El artículo 046, «¿Por qué añadir una carretera puede empeorar el tráfico?», también pone a prueba una afirmación intuitiva sobre añadir algo mediante la formulación explícita de la regla que lo gobierna.

Referencias

[1] American Mathematical Society, Graduate Student Blog. “Koch Snowflake.” 21 de diciembre de 2013. <https://blogs.ams.org/mathgradblog/2013/12/21/koch-snowflake/>