

¿Cómo podemos saber que un nudo no se puede deshacer?

Juan Segurola · Todos los derechos reservados

QUE · Artículo 044 · Preguntas sencillas, respuestas profundas · Versión 0.1 ES

No conseguir desatar una cuerda enredada no demuestra que sea imposible. Quizá no hemos encontrado la secuencia adecuada de movimientos. Las matemáticas responden a una pregunta más precisa: especifican el objeto y las transformaciones permitidas y después identifican una propiedad que toda transformación permitida conserva.

El objeto habitual de la teoría de nudos es un lazo cerrado encajado en el espacio tridimensional. No tiene un extremo libre del que simplemente se pueda tirar para hacerlo pasar por el lazo. Podemos deformarlo sin cortarlo ni hacer pasar un tramo a través de otro. Que pueda convertirse en un círculo sin nudos es entonces una pregunta sobre su topología, no sobre la paciencia, el rozamiento ni la fuerza de los dedos. [1]

1. Por qué cerrar los extremos cambia la pregunta

Un cordón de zapato corriente tiene extremos y grosor. Hacer pasar un extremo por un lazo está permitido en muchas tareas prácticas de desenredado; no es una operación sobre un nudo matemático cerrado. Fijar los extremos, unirlos o permitir que se muevan crea problemas distintos. Una afirmación de imposibilidad debe especificar a cuál se refiere.

El modelo matemático también ignora el coste del estiramiento y la rotura del material. Una configuración físicamente atascada puede ser difícil de manipular sin ser topológicamente no trivial. A la inversa, un lazo cerrado puede seguir anudado aunque sea perfectamente flexible y no tenga rozamiento. Los obstáculos mecánicos y los topológicos no deben tratarse como sinónimos.

Consideraremos nudos cerrados ordinarios, suaves o poligonales, en vez de encajes patológicos con una estructura local infinitamente complicada. Ese alcance basta para el argumento basado en diagramas que sigue y hace que las manipulaciones permitidas estén bien definidas.

2. Un dibujo necesita información sobre los cruces

Una proyección plana de un nudo contiene cruces aparentes. En cada cruce debemos registrar qué tramo pasa por encima del otro. Sin esa información, el dibujo no determina la disposición espacial que pretende representar.

Un cruce en un diagrama no es una intersección física de los dos tramos. Están separados en la tercera dimensión. Mover el lazo puede crear o eliminar cruces en su proyección, de modo que contar simplemente los cruces de un dibujo no demuestra que el lazo esté anudado.

Los movimientos de Reidemeister describen tres cambios locales de los diagramas de nudos: crear o eliminar un rizo, crear o eliminar un par de cruces y deslizar un tramo más allá de un cruce. Para la clase de nudos considerada aquí, los diagramas equivalentes pueden conectarse mediante estos movimientos junto con deformaciones planas. [1] Esto proporciona un vocabulario finito para comprobar si una propiedad del diagrama sobrevive a todo cambio permitido.

3. El color como criterio de estructura

Dividamos un diagrama en arcos que van de un paso por debajo al siguiente. Asignemos a cada arco uno de tres colores. En cada cruce, exijamos que los colores de los tres arcos incidentes sean todos iguales o todos distintos. Una coloración no trivial usa más de un color en algún lugar del diagrama.

El nudo trébol tiene un diagrama de tres arcos a los que se pueden asignar tres colores distintos cumpliendo la regla en cada cruce. Un círculo sin nudos, en su diagrama sin cruces, tiene un solo arco, por lo que no admite una coloración no trivial. El resultado útil es que la existencia de una coloración no trivial con tres colores se conserva bajo los movimientos de Reidemeister. [1]

Si se cumple esa conservación, la conclusión se sigue: un trébol no puede convertirse en un círculo sin cruces mediante las deformaciones permitidas. De lo contrario, una secuencia de movimientos conservaría en cada paso la posibilidad de una coloración no trivial y llegaría a un diagrama que carece de ella. Eso es una contradicción.

4. Por qué la regla de coloración puede sobrevivir a un movimiento

Hay una forma algebraica de examinar la regla local. Etiquetemos los colores con 0, 1 y 2 y calculemos módulo tres. Si el arco que pasa por encima tiene color a y los dos arcos que pasan por debajo tienen colores b y c , la condición es $2a = b + c$ módulo tres. Los colores iguales la cumplen; tres colores distintos también.

Dados a y b , el color de continuación es, de forma única, $c = 2a - b$ módulo tres. Aplicar esa operación dos veces con el mismo color superior devuelve b , puesto que $2a - (2a - b) = b$. Esta es el álgebra que explica la reversibilidad cuando se introduce o elimina un par de cruces que se cancelan.

Para el movimiento de tres tramos, escribamos $f_a(b) = 2a - b$. La compatibilidad pertinente es $f_a(f_b(c)) = f_{f_a(b)}(f_a(c))$. Ambos lados se reducen a $2a - 2b + c$ módulo tres. Para un rizo, $f_a(a) = a$. Estas relaciones proporcionan la consistencia local necesaria para extender y retraer las coloraciones a través de los tres movimientos. También conservan las asignaciones de un único color, de modo que una coloración no trivial no puede desaparecer convirtiéndose inadvertidamente en una trivial.

El álgebra es valiosa porque sustituye la confianza en un dibujo complicado por ecuaciones que pueden comprobarse. Una demostración mediante diagramas sigue teniendo que asociar las ecuaciones con los movimientos y sus tramos; los símbolos no eliminan esa obligación de representación.

5. Un criterio que funciona no es un clasificador completo

Si dos diagramas tienen valores diferentes de un invariante de nudos, no pueden representar el mismo nudo. Si coinciden, puede que el invariante sea simplemente demasiado poco discriminante para distinguirlos. La posibilidad de una coloración no trivial con tres colores proporciona un obstáculo para desanudar, no una promesa de resolver cualquier nudo.

Esta asimetría aparece en muchos criterios matemáticos. Una propiedad conservada puede descartar una transformación propuesta sin identificar un objeto único. Invariantes y algoritmos más potentes abordan preguntas más amplias, pero no es necesario añadir sus nombres para entender el argumento del trébol.

La certeza aquí está condicionada al modelo y a la demostración. No implica que todo nudo de una cuerda real sea físicamente imposible de deshacer, porque los extremos

abiertos o un corte pueden cambiar las operaciones permitidas. Tampoco intentar sin éxito muchos diagramas establece un obstáculo topológico.

Podemos saber que un nudo cerrado concreto no se puede deshacer si encontramos una propiedad que posee, demostramos que toda deformación permitida conserva esa propiedad y mostramos que el nudo trivial carece de ella. El paso decisivo es la conservación bajo todos los movimientos permitidos. Eso es lo que convierte un fracaso frustrante al buscar una solución en una razón matemática por la que no existe tal solución.

Referencias

[1] Hoberg, R. Knots and Braids. Trabajo del programa REU de la Universidad de Chicago, 26 de agosto de 2011, §3. <https://math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2011/REUPapers/Hoberg.pdf>

Lectura relacionada

Artículo 043: ¿Existe un número primo mayor que todos los demás?