

Eudoxo, Arquímedes y los métodos de agotamiento

Juan Seguro

Pregunta central

¿Cómo podían los matemáticos razonar rigurosamente sobre áreas, volúmenes y razones que no podían capturarse mediante una construcción elemental finita?

Contexto histórico y evolutivo

Los matemáticos griegos se enfrentaron a problemas que resistían una descomposición aritmética o geométrica simple: áreas curvas, volúmenes y razones entre magnitudes inconmensurables. Las tradiciones asociadas con Eudoxo proporcionaron una teoría general de la proporción y métodos capaces de acotar una magnitud cada vez con mayor precisión. Arquímedes utilizó después argumentos de agotamiento relacionados con una potencia excepcional, entre otros, en sus trabajos sobre círculos, esferas y segmentos parabólicos.

Llamar a estas técnicas «cálculo antes del cálculo» resulta tentador, pero distorsiona su naturaleza. No utilizaban las funciones simbólicas, derivadas, integrales ni el formalismo explícito de límites de las matemáticas modernas tempranas y del siglo XIX.

¿Qué podían saber las comunidades antes de esta transición?

La aproximación era posible y la intuición geométrica podía sugerir resultados. La dificultad consistía en demostrar resultados para magnitudes que exigían un refinamiento potencialmente ilimitado.

¿Qué cambió?

Los métodos de agotamiento transformaron la aproximación en argumento riguroso. Suponiendo que persistía una diferencia y mostrando que subdivisiones repetidas harían la diferencia restante menor que una magnitud admisible, los matemáticos podían excluir alternativas y establecer una igualdad.

Arquímedes también utilizó razonamientos mecánicos de forma heurística en algunas investigaciones para presentar después demostraciones geométricas. Esa distinción entre descubrimiento y demostración es epistémicamente importante.

¿Por qué pudo surgir esta capacidad?

Dependía de una cultura de demostración que ya exigía justificación explícita, combinada con trabajo sostenido sobre razón, geometría e inconmensurabilidad. También requería aceptar que una demostración escrita finita podía regir un proceso conceptualmente extensible sin un final fijado.

¿Qué formas posteriores de conocimiento hizo posibles?

Los resultados pasaron a formar parte de la herencia matemática estudiada posteriormente en tradiciones árabes y latinas y revisitada por matemáticos de la Edad Moderna. Proporcionaron precedentes históricos para el razonamiento riguroso sobre magnitudes continuas, aunque el cálculo moderno surgió de un entorno conceptual y simbólico diferente.

Nuevos límites y riesgos

La terminología retrospectiva puede borrar diferencias reales. Un argumento de agotamiento no es simplemente una integral escrita en notación antigua. Tratarlo de ese modo hace que la historia parezca dirigirse inevitablemente hacia las matemáticas modernas.

¿Qué cambió en la arquitectura del conocimiento humano?

La demostración se volvió capaz de **controlar un refinamiento indefinido**. Los humanos podían establecer afirmaciones exactas sobre magnitudes continuas sin completar físicamente un número infinito de operaciones.

Pérdida, exclusión e incertidumbre

Las obras del propio Eudoxo no se conservan directamente como las de Arquímedes, de modo que la atribución depende de testimonios posteriores. La genealogía entre el agotamiento antiguo y los conceptos modernos de límite está mediada históricamente, no es continua.

Mapa de dependencias

- DIRECTO ← PIO-023 Demostración deductiva: la aportación de los geómetras griegos
- INDIRECTO → PIO-025 Aristarco y la escala del sistema solar
- RETROSPECTIVO → PIO-054 Cálculo, límites e infinitesimales

Referencias

1. Winters, N. L. Method and Style in Archimedes' Quadrature of the Parabola. *Archive for History of Exact Sciences* 79, 15 (2025). <https://doi.org/10.1007/s00407-025-00352-w>
2. Netz, R. *The Works of Archimedes, Volume 1: The Two Books On the Sphere and the Cylinder*. Cambridge University Press (2004).
3. Knorr, W. R. *The Ancient Tradition of Geometric Problems*. Birkhäuser (1986).